1

विमाएं और सदिश विश्लेषण

(Dimentions and Vector Analysis)

1.0 भूमिका

विश्व में जो प्राकृतिक परिघटनाएं घटित होती हैं उनको समझना ही विज्ञान का उद्देश्य है। विज्ञान की अनेक शाखाओं में *भौतिकी* एक आधारभूत शाखा है। यह एक ऐसी आधारशिला है, जिस पर अन्य भौतिक विज्ञान जैसे रसायन विज्ञान भूविज्ञान, भूभौतिकी, खगोल विज्ञान आदि खड़े हैं। जीव विज्ञान की शाखाओं के विकास में भी भौतिकी का महत्त्वपूर्ण योगदान है।

हम विभिन्न प्रयोग करते हैं, भौतिकी में मात्रात्मक नाप तौल करते हैं तथा उनसे व्युत्पन्न परिणामों के आधार पर सिद्धान्तों को प्रस्तावित करते हैं। इन सिद्धान्तों के नये प्रयोगों द्वारा किये जा सकने वाले माप तौल के परिणामों का पूर्वानुमान कर सकते हैं।

इस पाठ में सर्वप्रथम हम माप के मात्रकों के विषय में अध्ययन करेंगे। माप के प्रत्येक मात्रक को मौलिक मात्रकों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यहाँ से हमें विमा की संकल्पना का ज्ञान होगा। भौतिक राशियों को हम उनके गुणधर्मों के आधार पर दो समूहों में विभाजित करेंगे (i) अदिश राशियां (ii) सदिश राशियां। अन्त में हम अदिश और सदिश राशियों से सम्बंधित सरल गणितीय संक्रियाओं का अध्ययन करेंगे। अपने पाठ्क्रम के अध्ययन के दौरान अनेक पाठों में आप भौतिकी के विभिन्न क्षेत्रों में सदिशों का उपयोग पाएंगे।

1.2 उद्देश्य

इस पाठ का अध्ययन करने के पश्चात् आप :

- *मौलिक और व्युत्पन्न राशियों में भेद कर पायेंगे हैं तथा इनके SI मात्रक बता सकेंगे;*
- *विभिन्न भौतिक राशियों की विमाएं लिख सकेंगे;*
- *विमीय समीकरणों का उपयोग कर सकेंगे;*
- *अदिश और सदिश राशियों में भेद बता सकेंगे और उदाहरण के साथ इन भेदों को स्पष्ट कर सकेंगे;*

- *दो सदिशों का परिणामी सदिश ज्ञात कर पायेंगे? और किसी सदिश का, उसके घटकों में वियोजन कर सकेंगे; तथा*
- *दो सदिशों का गुणनफल ज्ञात कर सकेंगे।*

1.3 माप के मात्रक (Units of Measurements)

भौतिकी के नियमों की परिभाषा भौतिक राशियों, जैसे दूरी गति समय बल, क्षेत्रफल, आयतन आदि के पदों में करते हैं। इन राशियों को अन्य मूल राशियों के माध्यम से परिभाषित करते हैं। ये हैं द्रव्यमान, लम्बाई, समय और कुछ अन्य, जिनकी चर्चा बाद में होगी।

यदि कोई व्यक्ति दूध मापता है तो उसे दूध का आयतन, किसी स्वीकृत मात्रक में व्यक्त करना चाहिए। इसी प्रकार दो शहरों को जोड़ने वाली, सड़क की लम्बाई भी किसी स्वीकृत मात्रक में व्यक्त की जानी चाहिए। इस प्रकार की कार्य विधि, जीवन को आरामदेह बना देती है। सड़क से यात्रा करने वाले प्रत्येक व्यक्ति को दूरी और समय का ज्ञान रहता है ताकि यात्रा की उचित योजना बनाई जा सके। यदि माप सर्व-स्वीकृत मात्रक न होते तो जीवन दूभर हो जाता। वैज्ञानिक नाप तौल में इस प्रकार के मात्रकों को होना अत्यंत आवश्यक है ताकि अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर सूचनाओं का आदान-प्रदान सुविधापूर्वक हो सके।

1.3.1 मात्रकों की SI पद्धति (System International units)

इन विचारों को ध्यान में रखते हुए अनेक विकसित सभ्यताओं ने सदियों से नाप तौल के क्षेत्रीय और राष्ट्रीय स्तर पर मापों के मानक मात्रक देने के प्रयास किए हैं। मापों के मात्रकों की पद्धति के विभिन्न चरणों के लंबे इतिहास में न जाकर हम वर्ष 1967 में आयोजित तेरहवीं जनरल कान्फ्रेन्स आन वेट्स एण्ड मेज़रस (XIII General Conference on Weights and Measures) के बारे में बताते हैं जिसमें मात्रकों की MKSA (मीटर-किलोग्राम-सेकण्ड-एम्पीयर) पद्धति की तर्कपूर्वक विवेचना करने के पश्चात् छः मूल मात्रकों पर आधारित पद्धति को अपना लिया गया। प्रणाली का परिमेयीकरण छः मौलिक मात्रकों को आधार मानकर हुआ तथा SI मात्रक प्रणाली स्वीकार की गई। इसको 'अंतरराष्ट्रीय मात्रक पद्धति (System International Units) का नाम दिया गया जो सभी भाषाओं में मात्रकों की SI पद्धति कहलाती है। सन् 1971 की जनरल कान्फ्रेंस में एक और मूल मात्रक 'मोल' (mole) (पदार्थ की मात्रा) को इसमें सम्मिलित किया गया। अब SI प्रणाली में सात मूल मात्रक हैं इन्हें सारिणी 1.1 में सूचीबद्ध किया गया है।

सारिणी 1.1: SI पद्धति के मूल

राशि	मात्रक	प्रतीक
लम्बाई	मीटर	m
द्रव्यमान	किलोग्राम	kg
समय	सेकण्ड	s
विद्युत-धारा	ऐम्पियर	A
ताप	केल्विन	K
ज्योति तीव्रता	कैन्डेला	Cd
पदार्थ की मात्रा	मोल	mol

अमरीका में लम्बाई के प्रयुक्त मात्रक आज भी गज़ और मील हैं। इनके अनुमात्रक सारिणी 1.2 में प्रस्तुत किये गये हैं।

सारिणी 1.2: हमारे दैनिक जीवन में बहुधा प्रयुक्त लम्बाई के मात्रक

1 मील	=	8 फर्लांग
1 फ़र्लांग	=	220 गज़
1 गज़	=	3 फीट
1 फुट	=	12 इंच
1 गज़	=	0.9144 मीटर (तथ्यतः ठीक)
1 इंच	=	2.54 सेन्टीमीटर (तथ्यतः ठीक)
1 मील	=	1.61 किलोमीटर

नाप तौल के मात्रकों का चुनाव करते समय मार्गदर्शी सिद्धान्त यह होता है कि **जहां तक सम्भव हो सके इन मामलों को जनसाधारण के दैनिक जीवन से जोड़ा जाय।** उदाहरणार्थ, द्रव्यमान के मात्रक किलोग्राम और लम्बाई के मात्रक मीटर को ही लीजिए। हम अपने दैनिक जीवन में भोजन-सामग्री, किलोग्राम या दस-बीस किलोग्राम में खरीदते हैं। कपड़ों की खरीद कुछ मीटर अथवा 10-20 मीटर में करते हैं। यदि द्रव्यमान का मात्रक ग्राम तथा लम्बाई का मात्रक मिलीमीटर चुना गया होता तो दैनिक जीवन में भी हम अनावश्यक रूप में बड़ी-बड़ी संख्यांओं का सामना करते। यही कारण है कि नाप तौल के मूल मात्रक, हमारे दैनिक जीवन से भली भांति जुड़े हैं। SI प्रणाली मूलतः दशमलव प्रणाली है। इस प्रणाली के मूल मात्रकों के दस गुने अथवा दसवें भाग से ही अन्य छोटे और बड़े मात्रक बनते हैं। इनमें दशमलव प्रणाली का कठोरता से पालन होता है।

मात्रकों के बहुगुणक और अपवर्तक मात्रकों को विशेष नाम दिए गए हैं। ये सारिणी 1.3 में सूचीबद्ध हैं।

सारिणी 1.3: दस की घात के पूर्वप्रत्यय

दस के घात	पूर्वप्रत्यय	प्रतीक	उदाहरण	
10^{-18}	एटो	a		
10^{-15}	फेम्टो	f	फेम्टोमीटर	fm
10^{-12}	पीको	p	पीकों फराड	pF
10^{-9}	नेनो	n	नेनोमीटर	nm
10^{-6}	माइक्रो	u	माइक्रोन	rem
10^{-3}	मिली	m	मिलीग्राम	mg
10^{-2}	सेंटी	c	सेंटीमीटर	cm
10^{-1}	डेसी	d	डेसीमीटर	dm
10^{1}	डेका	da	डेकाग्राम	dag
10^{2}	हेक्टो	h	हेक्टोमीटर	hm
10^{3}	किलो	k	किलोग्राम	kg
10^{6}	मेगा	M	मेगावाट	MW
10^{9}	गीगा	G	गीगा हर्ट्ज	GHz
10^{12}	टेरा	T	टेरा हर्ट्ज	THz
10^{15}	पेटा	P		
10^{18}	एग्ज़ा	E		

1.3.2 द्रव्यमान, लम्बाई और समय के मानक

एक बार SI पद्धति के मूल मात्रकों का चयन कर लेने के बाद हमें मूल राशियों के लिए मानकों का सेट निश्चित कर लेना चाहिए।

द्रव्यमानः द्रव्यमान का SI मात्रक **किलोग्राम** है। यह प्लैटिनम-इरीडियम की मिश्रधातु के बने एक विशेष बेलन का द्रव्यमान है जिसे फ्रान्स के 'इन्टरनेशनल ब्यूरो आफ वेट्स एण्ड मेज़रस'' (International Bureau of Weights and Measures) में रखा गया है। इस मानक की स्थापना 1887 में हुई थी और अब तक इसमें कोई परिवर्तन नहीं आया है क्योंकि यह मिश्र धातु असाधारण रूप से स्थायी है। इसी मिश्रधातु के आदिप्रारूप किलोग्राम बनाकर सदस्य राष्ट्रों को दे दिए गए हैं। भारत का राष्ट्रीय आदि प्रारूप किलोग्राम संख्या 57 है। जो राष्ट्रीय भौतिकी प्रयोगशाला (National Physical Laboratory) नई दिल्ली में सुरक्षित है।

लम्बाईः मीटरी प्रणाली को 1792 में फ्रांस में प्रतिष्ठित किया गया। भूमध्यरेखा से पेरिस होते हुए उत्तरी ध्रुव तक की दूरी के $\frac{1}{107}$ वें भाग को मीटर की परिभाषा के रूप में स्वीकृति दी गई। आगे चलकर कुछ व्यावहारिक कारणों से इस मानक का परित्याग कर दिया गया। 1872 में, पेरिस में, मीटर के लिए अधिक उपयुक्त मानक निर्धारित करने के हेतु एंक अन्तर्राष्ट्रीय आयोग की स्थापना की गई, जिसने 1875 में 'मीटर' की नई परिभाषा दी। इस परिभाषा के अनुसार, नियंत्रित अवस्था में सुरक्षित प्लैटिनम-इरीडियम की एक छड़ पर अंकित दो रेखाओं के बीच कि दूरी को 'मीटर' कहा गया। फिर भी प्राकृतिक विनाश से इसकी सुरक्षा की गारंटी नहीं है और विज्ञान तथा प्रौद्योगिकी की वर्तमान आवश्यकताओं के अनुसार इसकी परिशुद्धता भी सीमित है। 1983 में 'मीटर' को निम्नलिखित रूप में पुनः परिभाषित किया गया।

> $\frac{1}{299792458}$ सेकण्ड में निर्वात में प्रकाश द्वारा चली गई दूरी को एक मीटर कहते हैं। यह परिभाषा इस तथ्य पर आधारित है कि निर्वात में प्रकाश की गति 299792458 मीटर प्रति सेकण्ड है।

मीटर के सभी मानक यदि किसी प्राकृतिक विनाश में समाप्त हो जाएँ तो भी नई परिभाषा के आधार पर मीटर का एक नया आदिप्रारूप बनाया जा सकता है। इस परिभाषा का यह सर्वोत्तम लाभ है।

समयः प्रारम्भ में 'सेकण्ड' को पृथ्वी द्वारा अपने अक्ष पर किये गये घूर्णन काल के पदों में परिभाषित किया गया। इस घूर्णन काल को 24 भागों में विभाजित करते हैं तथा प्रत्येक भाग को 'एक घंटा' कहते हैं। एक घंटो को 60 मिनटों में तथा एक मिनट को 60 सेकण्डों में विभाजित करते हैं। इस प्रकार 'एक सेकण्ड' एक 'सौर दिवस' (Solar Day) या $\frac{1}{86400}$ वाँ भाग हैं। और अधिक सुनिश्चयत शब्दों में समय के मूल मात्रक, माध्य सौर सेकंड (mean solar second) की परिभाषा वर्ष 1900 के माध्य सौर दिन का $\frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{24}$ अंश होती है। यह परिभाषा 1960 तक मान्य रही। यह ज्ञात है कि समय के अनुसार पृथ्वी का चक्रण-काल बदलता रहता है अतः एक दिन की लम्बाई भी अचर नहीं है, इसमें अति न्यून सही, पर परिवर्तन तो होता है। 1967 में तेरहवीं जनरल कान्फ्रेंस आन वेट्स एण्ड मेज़र्स'' द्वारा सेकण्ड की निम्नलिखित परिभाषा दी गई।

> सीज़ियम-133 परमाणु को 9192631770 कम्पन करने के लिए आवश्यक समय 'एक सेकण्ड' है।

इस परिभाषा के मूल में एक युक्ति है जिसे परमाणु घड़ी (atomic clock) कह सकते हैं। कुछ परमाण्वीय संक्रमणों की आवृत्ति को, 10^{12} में 1 भाग, जितनी परिशुद्धता से नापा जा सकता है। ये आवृत्तियाँ (संक्रमण) अति स्थायी हैं तथा बाह्य परिस्थितियों से अत्यल्प प्रभावित होती हैं।

1.3.3 व्युत्पन्न मात्रक (Derived Units)

हमने यांत्रिकी में प्रयुक्त तीन मूल मात्रकों की परिभाषा की है। जब इन मूल मामलों की आपस में अन्योन्य क्रिया होती है तो उन राशियों की उत्पत्ति होती है जिन्हें व्युत्पन्न मात्रकों में नापते हैं। उदाहरणार्थ जब दूरी और समय में अन्योन्य क्रिया होती है तो गति, त्वरण आदि की व्युत्पत्ति होती है। गति को मीटर प्रति सेकण्ड $\left(\frac{m}{s}\right)$ में नापते हैं। इसी प्रकार जब लम्बाई की अन्योन्य क्रिया लम्बाई से होती है तब नई राशियाँ क्षेत्रफल, आयतन आदि बनती हैं। निम्नलिखित सारणियों में साधारणतया उपयोग में आने वाले कुछ व्युत्पन्न मात्रकों और कुछ अन्य विशेष नाम वाले मात्रकों को दिया गया है।

सारिणी 1.4: व्युत्पन्न SI मात्रकों के उदाहरण

राशि	SI मात्रक	प्रतीक
क्षेत्रफल	वर्गमीटर	m^2
आयतन	घन मीटर	m^3
गति और वेग	मीटर प्रति सेकण्ड	ms^{-1}
त्वरण	मीटर प्रति वर्ग सेकण्ड	ms^{-2}
घनत्व	किलोग्राम प्रति सेकण्ड प्रति घनमीटर	$kg\ m^{-3}$

सारिणी 1.5: विशेष नाम वाले व्युत्पन्न SI मात्रकों के उदाहरण

राशि	नाम	प्रतीक	मात्रक प्रतीक
बल	न्यूटन	N	$kg\ ms^{-2}$
दाब	पास्कल	Pa	Nm^{-2}
ऊर्जा, कार्य	जूल	J	Nm
शक्ति	वाट	W	Js^{-1}

SI प्रणाली के मात्रक, एक (coherent set) सुसंगत समुच्चय बनाते हैं। किन्हीं दो इकाई राशियों के गुणनफल से परिणामी राशि का मात्रक सीधे-सीधे मिल जाता है। जब इकाई द्रव्यमान (kg) में इकाई आयतन (m^3) से भाग देते हैं तो सीधे-सीधे घनत्व का मात्रक kg/m^3 प्राप्त होता है। किसी भी राशि का मात्रक उचित क्रम में लिखते समय सावधान रहना चाहिए। कार्य का मात्रक 'न्यूटन-मीटर' है जिसको विशेष नाम 'जूल' दिया गया है। इसे Nm की तरह लिखना चाहिए, mN की तरह नहीं। यदि mN लिखा तो इसका अर्थ मिली न्यूटन होगा।

पाठगत प्रश्न (Intext Questions) 1.1

1. *एक कार की चाल 80km/hr है। m/s में इसकी चाल क्या होगी ?*

   ....

2. *मौलिक राशियों और व्युत्पन्न राशियों में भेद स्पष्ट कीजिए।*

   ....

3. *एक परमाणु की त्रिज्या* 10^{-10} m *है। इसे माइक्रोन (micron) में व्यक्त कीजिए।*

   ....

4. *किसी मकान का सम्पूर्ण क्षेत्रफल 4500 वर्गफीट है। इस क्षेत्रफल को वर्ग मीटर में व्यक्त कीजिए।*

   ....

1.4 भौतिक राशियों की विमायें

भौतिक राशियों की विमा निर्धारित करना उपयोगी होता है। तीन मौलिक मात्रकों लम्बाई, द्रव्यमान और समय की विमाओं को क्रमशः प्रतीकों L,M और T से व्यक्त करते हैं। अन्य भौतिक राशियों की विमाओं को इन्हीं प्रतीकों के घातांकों के रूप में व्यक्त करते हैं। निम्नलिखित उदाहरण देखें।

(1) गति $= \dfrac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \dfrac{m}{s} = \dfrac{L}{T} = LT^{-1}$

(2) घनत्व $= \dfrac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} = \dfrac{kg}{m^3} = \dfrac{M}{L^3} = ML^{-3}$

(3) बल $= \text{द्रव्यमान} \times \text{त्वरण} = kg \times \dfrac{m}{s^2} = MLT^{-2}$

भौतिकी राशियों से संबंधित समीकरणों अथवा व्यंजकों की यथार्थता जांचने के लिए विमीय-विश्लेषण (dimensional analysis) एक शक्तिशाली विधि है। कुछ उदाहरणों से यह बात स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 1.1: *किसी कण की यांत्रिक ऊर्जा को दो भिन्न-भिन्न रूपों (a)* $\frac{1}{2}mv^2$ *(b) mgh में लिखा जा सकता है। क्या इन दोनों की विमाएँ एक-सी हैं ?*

हल: (a) $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\ M\left(\frac{L}{T}\right)^2 = \frac{1}{2}ML^2\ T^{-2}$

(b) $mgh = M\left(\frac{L}{T^2}\right)L = ML^2\ T^{-2}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि ऊर्जा के दोनों व्यंजक, विमा के अनुसार समतुल्य हैं। इनमें भिन्नता केवल विमाहीन गुणक (यहां पर $\frac{1}{2}$) के कारण है।

उदाहरण 1.2: *मान लो एक कार स्थिर अवस्था से चलना प्रारम्भ करती है। एक समान त्वरण a से चलती हुई t समय में x दूरी पार करती है। a और t से संबंध स्थापित करते हुए x के लिए व्यंजक प्राप्त करो।*

हल: मान लिया कि x का व्यंजक इस तरह है- $x \propto a^m t^n$ जहाँ $\propto$ समानुपात का प्रतीक है। समीकरण सही होने के लिए दोनों पक्षों की विमाएँ समान होनी चाहिए।

समीकरण $x \ \alpha\, a^m t^n$ में-

वामपक्ष (L.H.S.) $x = L^{+1} = L^1 M^0 T^0$

दक्षिण पक्ष (RHS) $= a^m t^n = \left(\frac{L}{T^2}\right)^m .T^n$

$$= L^m T^{-2m} T^n = L^m T^{n-2m} = L^m M^\circ T^{n-2m}$$

यदि दोनों तरफ की विमाएं समान हैं तो L M और T की विमाओं की तुलना से हम पाते हैं कि

$$L^1 = L^m \qquad M^\circ = M^\circ$$
$$m = 1 \qquad T^0 = T^{n-2m}$$
$$n\text{-}2m = 0$$
या $n = 2m$

$\therefore n = 2$

अतः $x \ \alpha\ a\, t^2$

आगे चलकर हम पढ़ेंगे कि सही समीरण $x = \frac{1}{2} a\, t^2$ है। यहां भी समानुपात का प्रतीक हटाकर एक विमाहीन राशि $\frac{1}{2}$ लगा दी गई है।

उदाहरण 1.3: *एक सरल दोलन का प्रयोग करने पर यह गुणात्मक परिणाम निकलता है कि दोलक का आवर्तकाल 'T' दोलक की लम्बाई 'l' और गुरुत्व त्वरण 'g' पर निर्भर करता है परन्तु सही सम्बंध ज्ञात नहीं है। विमीय विश्लेषण विधि का प्रयोग करते हुए l, g^T और g में संबंध स्थापित कीजिए।*

हल : दिया है कि $T \propto l^m g^n$

बायीं ओर का विमीय सूत्र $= T = L^\circ M^\circ T^1$

दायीं ओर का विमीय सूत्र $l^m g^n = L^m \left(\frac{L}{T^2}\right)^n = L^{m+n} T^{-2n}$

$$= L^{m+n} T^{-2n} M^0$$

दोनों ओर की विमाओं की तुलना करने पर

$$m + n = o; \quad -2n =$$
$$m = -n; \qquad n = -\frac{1}{2}$$
$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ और } n = -\frac{1}{2}$$

अतः $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$

अतः $T\alpha\sqrt{\left(\frac{l}{g}\right)}$, वास्तव में सही समीकरण है $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

पाठगत प्रश्न 1.2

1. *एक ऊंची इमारत की छत से एक पत्थर गिरा दिया जाता है। पत्थर, जिस वेग v से भूतल से टकराता है, वह इमारत की ऊंचाई h और गुरूत्व त्वरण g पर निर्भर करता है। v का व्यंजक ज्ञात करो।*

   ....

2. *किसी गतिशील कण के विस्थापन का व्यंजक है*
   $y = A \sin (K_1 t + K_2 x)$
   जहां y, A और x मीटर में तथा t सेकण्ड में है K_1 और K_2 की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

   ....

3. *किसी गतिशील पिण्ड का त्वरण, लगाये गए बल के समानुपाती तथा द्रव्यमान के व्युत्क्रमानुपाती है। बल का विमीय सूत्र बताइये।*

   ....

1.5 परिमाण की कोटि (Order of Magnitude)

किसी राशि के सन्निकट मान को ज्ञात करना, बहुधा उपयोगी होता है। इससे किसी अति विस्तृत गणना के परिणाम का परीक्षण करने अथवा किसी राशि का सन्निकट परिणाम जानने में सहायता मिलती है। किसी राशि की परिमाण की कोटि *दस की वह घात* है जो उस राशि के परिमाण को व्यक्त करता है। हम जानते हैं प्रकाश की गति निर्वात में 3×10^8 m/s है अतः हम कहते हैं कि इसकी *परिमाण की कोटि* 8 है। यदि किसी राशि में, **चार परिमाण की कोटि** की वृद्धि होती है तो इसका तात्पर्य, यह है कि उस राशि का परिमाण 10 गुना बढ़ गया है।

उदाहरण 1.5: *किसी साधारण कमरे का आकार $6 \times 5 \times 4$ m^3 है। इस पूरे कमरे को क्रिकेट की गेदों से इस प्रकार भरना है कि गेंदे दबें नहीं। यदि एक गेंद का व्यास 5 cm है तो गेदों की अनुमानित संख्या का आकलन करो।*

हल: कमरे का आयतन $= 6\times5\times4 = 120\text{m}^3$

एक गेंद का आयतन (लगभग) $= 5\times 5\times 5$ cm^3

$$= 125 \times 10^{-6}\,\text{m}^3$$

लगभग आयतन निकालने के लिए गेंद को घनात्मक मान लिया गया है जबकि तुम जानते हो कि गेंद का सही आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$ है। जहां r गेंद की त्रिज्या है।

अतः गेदों की संख्या $= \frac{120}{125\times10^{-6}} = 10^6$ गेंद

टिप्पणी: परिमाण की कोटि में व्यक्त मान की तुलना में सही गणना से प्राप्त मान में केवल 10 के घटक का ही अंतर होगा।

सारिणी 1.6: कुछ मापित राशियों के सन्निकट मान

पृथ्वी से चन्द्रमा की औसत दूरी	3.8×10^{8} m
पृथ्वी की औसत त्रिज्या	6.4×10^{6} m
हाइड्रोजन परमाणु का व्यास	1×10^{-10} m
परमाणु-नाभिक का व्यास	1×10^{-14} m
सूर्य का द्रव्यमान	2×10^{30} kg
पृथ्वी का द्रव्यमान	6×10^{24} kg
मच्छर का द्रव्यमान	1×10^{-5} kg
इलेक्ट्रान का द्रव्यमान	9.1×10^{-31} kg
एक वर्ष	3.2×10^{7} s
एक दिन	8.6×10^{4} s
ध्वनि तरंग का आवर्त काल	1×10^{-3} s
रेडियो तरंग का आवर्त काल	1×10^{-6} s

पाठगत प्रश्न 1.3

1. *एक अध्यापक के घर पूरे वर्ष 0.4 यूनिट बिजली प्रति घंटा खर्च होती है। बिजली की कीमत रु. 3/- प्रति यूनिट है। अध्यापक के घर प्रतिवर्ष बिजली पर हुए खर्च की गणना करो।*

....

2. *यदि देश की जनसंख्या 900×10^{6} है तो पूरे देश में प्रतिवर्ष नमक का खर्च निकालो।*

....

1.6 सदिश और अदिश राशियाँ

1.5.1 अदिश राशियाँ

भौतिक राशियों का विवरण सदा किसी संख्या के साथ उचित मात्रक लगाकर दिया जाता है। दैनिक जीवन में अनेक राशियों का परिमाणात्मक विवरण प्रस्तुत करने की आवश्यकता होती है जैसे किसी पदार्थ का घनत्व, बर्तन का आयतन, दो शहरों के बीच की दूरी, गतिशील कार की चाल, वह बल जो प्रत्येक वस्तु को पृथ्वी की ओर खींचता है और वह बल-आघूर्ण जो किसी कपाट को खोलता या बन्द करता है आदि। इनमें से कुछ राशियों को एक संख्या के साथ, मात्रक लगाकर व्यक्त करते हैं तो यह उस राशि का पूर्ण और सही विवरण होता है। उदाहरणार्थ—

(i) तांबे का घनत्व $= 8.9 \times 10^{3}$ kg/m^{3}, (ii) पृथ्वी की माध्य त्रिज्या $= 6.4 \times 10^{6}$ m, (iii) एक दिन $= 8.6 \times 10^{4}$s.

इन राशियों को व्यक्त करने के लिए किसी दिशा को निर्दिष्ट करने की आवश्यकता नहीं पड़ती है। ऐसी राशियाँ को अदिश राशियां कहते हैं।

अदिश राशि का केवल परिमाण होता है, दिशा नहीं होती है।

1.5.2 सदिश राशियाँ

सदिश राशि वह भौतिक राशि है जिसे व्यक्त करने के लिए परिमाण और दिशा दोनों की आवश्यकता हैं। बल एक सदिश राशि है। यदि हम किसी वस्तु पर 100 N का बल लगाते हैं तो हमें बल की *दिशा* भी बतानी चाहिए। वेग एक अन्य सदिश राशि है। यदि हम किसी वस्तु की गति का विवरण देते हैं तो हमें बताना पड़ेगा कि वह वस्तु कितनी तीव्र गति से किसी दिशा में गतिशील है।

एक सदिश राशि का परिमाण और दिशा दोनों होते हैं।

सदिशों को सदा लेखाचित्रों से दर्शाया जा सकता है। मान लिया कि किसी पिण्ड पर 500 N का बल पश्चिम से पूर्व की ओर लगाया जा रहा है। इस सदिश राशि को लेखाचित्र द्वारा दिखाया जा सकता है जैसा चित्र 1.1 में दिया है।

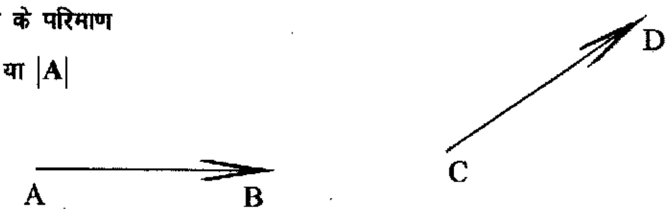
टिप्पणी : अदिश से भिन्न रूप में व्यक्त करने के लिए सदिश को एक अक्षर के ऊपर तीर बनाकर लिखते हैं या फिर बड़े और मोटे अक्षरों से प्रदर्शित करते हैं।

यथा–

सदिश को इस प्रकार लिखते हैं : $\vec{A}$ या **A**

अदिश को इस प्रकार लिखते है: *A*

सदिश के परिमाण का प्रतीक है $|\vec{A}|$ या $|\mathbf{A}|$

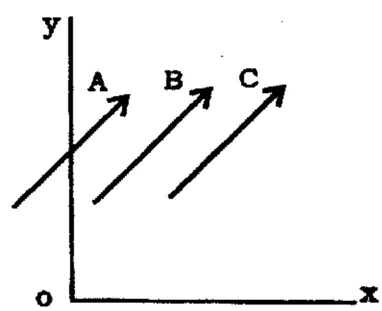


चित्र 1.1: सदिश का लेखाचित्र द्वारा निरूपण

इस सदिश का निरूपण, रेखा AB से करते हैं। रेखा AB की लम्बाई = 5cm (माना) बल का परिमाण 500N, व्यक्त करती है एवं सदिश की दिशा A से B की ओर है (पश्चिम से पूर्व)। यहां बिन्दु A को पुच्छ तथा बिन्दु B को तीर का निशान बनाकर शीर्ष कहते हैं।

चित्र 1.1 में एक अन्य सदिश **CD** भी दिखाया गया है जिसका परिमाण 300 N (3 cm लम्बाई) है और यह अन्य दिशा की ओर प्रभावी है।

किन्हीं दो सदिशों **A** और **B** को समान सदिश कहा जाता है, यदि उनके परिमाण समान हों तथा वे एक ही दिशा में प्रभावी हों। लेखाचित्रों के अनुसार वे सभी सदिश जिनकी लम्बाई समान हो तथा जो एक दूसरे के हों समान्तर समान सदिश कहलाते हैं जैसा कि चित्र 1.2 में दिखाया गया है। तीनों सदिशों **A**, **B** और **C** की लम्बाई समान है । (एक समान

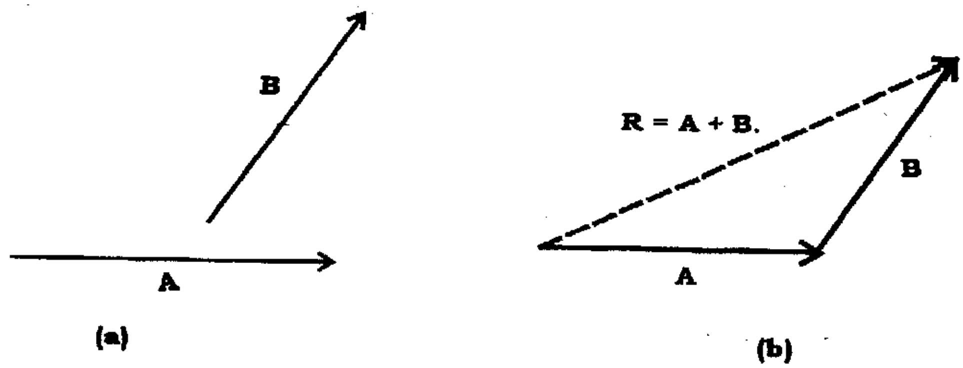


चित्र 1.2: बराबर सदिशों का लेखाचित्र द्वारा निरूपण

परिमाण है) और एक दूसरे के समांतर हैं (एक ही दिशा में प्रभावी हैं), इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$.

1.5.3 सदिशों का योग अदिश राशियों की तरह ही दो या दो से अधिक सदिशों को भी एक साथ तभी जोड़ते हैं जबकि उनके मात्रक समान हों। लेखाचित्र बनाकर दो सदिशों के योग का परिणामी सदिश निकालना काफी सरल होता है।

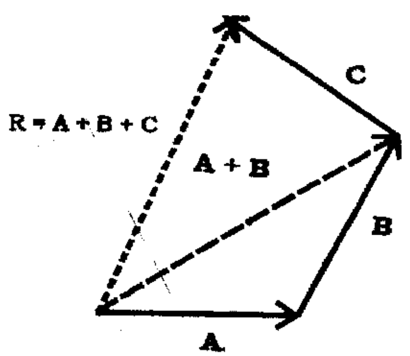
मान लिया कि दो सदिश $\mathbf{A}$ और $\mathbf{B}$ हैं। हमें उनका योग $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ज्ञात करना है।



चित्र 1.3: दो सदिशों का योग

लेखाचित्र द्वारा दोनों सदिशों को चित्र 1.3 (a) में दिखाया गया है। इन सदिशों का योग ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित विधि अपनाते हैं।

सदिश $\mathbf{A}$ का लेखाचित्र बनाओ। अब सदिश $\mathbf{B}$ इस प्रकार बनाओ कि $\mathbf{B}$ का पुच्छ, $\mathbf{A}$ के शीर्ष से प्रारम्भ हो जैसा कि चित्र 1.3 (b) में दिखाया गया है। हम जानते हैं कि सदिश $\mathbf{B}$ के समान्तर विस्थापन से सदिश बदलता नहीं है। सदिश $\mathbf{A}$ के पुच्छ से सदिश $\mathbf{B}$ के सिर तक खींचा गया सदिश $\mathbf{R} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}$ है। इसी विधि का अनुसरण करते हुए दो से अधिक सदिशों का योग भी ज्ञात कर सकते हैं। मान लिया कि तीन सदिश $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ और $\mathbf{C}$ हैं। हमें $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ ज्ञात करना है।



चित्र 1.4: लेखाचित्र द्वारा तीन सदिशों का योग

सदिश $\mathbf{A}$ बनाओ। सदिश $\mathbf{B}$ इस प्रकार बनाओ कि $\mathbf{B}$ का पुच्छ, $\mathbf{A}$ के सिर से प्रारम्भ हो। अब जो सदिश,

A के पुच्छ से प्रारम्भ होकर B के सिर पर समाप्त होता है वह $(A+B)$ के योग के बराबर होगा। इसी विधि से $(A+B)$ में सदिश C जोड़कर सदिश $R=A+B+C$ ज्ञात कर सकते हैं। अब आप यह समझ गए होंगे कि इसी विधि के अनुसार कई सदिशों का योग निकाला जा सकता है।

उपरोक्त लेखाचित्र विधि के अनुसार यह दिखाना बहुत सरल है कि

(i) $A + B = B + A$ (सदिश योग का क्रमविनिमेय गुण) ....(1.1)

(ii) $A+(B+C)=(A+B)+C$ .... (सदिश योग का साहचर्य गुण) ....(1.2)

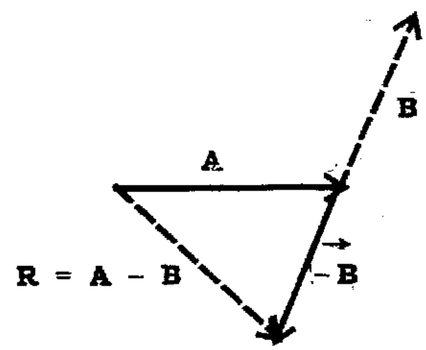
1.5.4 सदिशों का घटाना

किसी दिये गये सदिशों का ऋणात्मक सदिश वह सदिश है, जिसका परिमाण दिये गये सदिश के बराबर हो परन्तु दिशा विपरीत हो। यदि A एक सदिश है जिसका परिमाण 300 यूनिट है तथा दिशा पूर्व की ओर है तो $(-A)$, वह सदिश है जिसका परिमाण 300 यूनिट और दिशा पच्छिम की ओर है। ऋणात्मक सदिश की यह परिभाषा मानकर हम दो सदिशों का अन्तर उसी प्रकार ज्ञात कर सकते हैं जिस प्रकार दो सदिशों का योग ज्ञात किया जाता है।

माना कि हमें ज्ञात करना है $R = A - B$

इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं $R = A + (-B)$

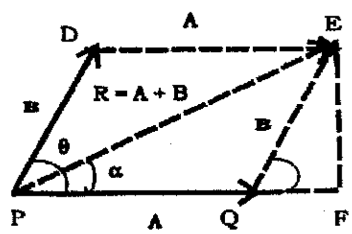
A − B को लेखाचित्र द्वारा ज्ञात करना यहां दिखाया गया है। पहले हम सदिश A खीचते हैं फिर सदिश B खीचते हैं। $[(A+(-B))]$ ज्ञात करने के लिए सदिश −B इस प्रकार खीचतें हैं कि −B का पुच्छ, A के सिर से प्रारम्भ होता है। A के पुच्छ से -B के सिर को जोड़ने वाला सदिश ही $(A-B$ है।



चित्र 1.5: लेखाचित्र द्वारा दो सदिशों का अन्तर ज्ञात करना

1.5.5 सदिशों के योग-संबंधी समान्तर-चतुर्भुज नियम

दो सदिशों का योग, बिना लेखाचित्र बनाए, विश्लेषक विधि से भी ज्ञात किया जा सकता है।



चित्रः 1.6. सदिशों का समान्तर चतुर्भुज नियम

माना कि A और B दो सदिश हैं तथा उनके बीच का कोण θ है। हम एक समान्तर चतुर्भुज PQED की रचना करते हैं जहां $PQ = DE = A$ और $PD = QE = B$

यदि रेखा EF, PQ पर लम्बवत् हो तो ΔPFE में-

$$(PE)^2 = (PF)^2 + (FE)^2 \quad \text{.......................(1.3)}$$
$$= (PQ + QF)^2 + (FE)^2$$
$$= (PQ)^2 + (QF)^2 + 2\,(PQ)\,(QF) + (FE)^2$$
$$= (PQ)^2 + (QE)^2 + 2\,PQ.QE\,\frac{QF}{QE}$$

अतः $R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$ ....(1.4)

$$R = \sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta} \quad \text{.......................(1.5)}$$

समीकरण (1.5) में $|\mathbf{R}|$ का व्यंजक हमकों कोण पर झुके दो सदिशों, **A** और **B** के योग का परिमाण बताता है।

विशेष परिस्थितियाँ

(i) जब $\theta = 0$ यानी जब दोनों सदिश एक दूसरे के समान्तर हैं
तो $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ....(1.6 a)

(ii) जब $\theta = \frac{\pi}{2}$ तो $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ ....(1.6 b)

(iii) जब $\theta = \pi$ यानी जब दोनों सदिश एक दूसरे के प्रति समान्तर हैं (दोनों की दिशा एक दूसरे के विपरीत है)

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB}, \qquad R = A - B \quad \text{.......................(1.6 c)}$$

या $R = A - B$

किसी विशेष दिशा के सापेक्ष, **R** की दिशा भी विश्लेषिक विधि से ज्ञात कर सकते हैं। मान लें कि सदिश **A** के सापेक्ष, **R** की दिशा α कोण पर है

$$\text{तब } \tan\alpha = \frac{EF}{PF} = \frac{EF}{PQ+QF} = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$$

$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$$

A, **B** और का मान ज्ञात है अतः **R** की दिशा (α) आसानी से ज्ञात की जा सकती है।

विशेष परिस्थितियां

हम उन्हीं परिस्थितियों की चर्चा करें जिसके लिए R का परिमाण निकाल चुके हैं

(i) जब $\theta = 0, \tan\alpha = 0, \alpha = 0$ ....(1.8 a)
R और **A** संपाती (coincide) हैं

(ii) जब $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \tan\alpha = \frac{B}{A}$ ....(1.8 b)

(iii) जब $\theta = \pi \quad \tan\alpha = 0$ ....(1.8 c)

R की दिशा **A** अथवा **B** के साथ-साथ होगी

पाठगत प्रश्न 1.4

1. तीन सदिश जिनमें परिमाण 8, 16 और 20 यूनिट हैं एक ही तल में स्वेच्छ अभिविन्यस्त (oriented orbitarily) है। इनके परिणामी सदिश का न्यूनतम और अधिकतम परिणाम क्या हैं ?

....

2. एक आदमी 3.0 *km* पूर्व की ओर तत्पश्चात 4.0 *km* उत्तर की ओर चलता है।
   (a) प्रारम्भ बिन्दु से वह कितनी दूरी पर है ?
   (b) उसकी अंतिम स्थिति की दिशा क्या है ?

....

3. दो सदिश *A* और *B* बराबर परिमाण के हैं। उनके बीच 60° का कोण है। निम्नलिखित को लेखाचित्र द्वारा ज्ञात करो।
   (a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, (c) $\mathbf{B}-\mathbf{A}$
   (d) $\mathbf{A}+2\mathbf{B}$, (e) $\mathbf{A}-2\mathbf{B}$

....

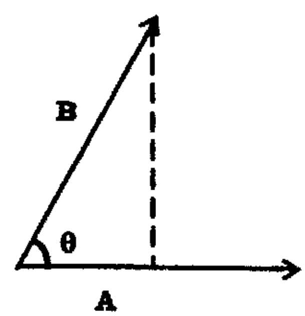
1.6. सदिशों का गुणन (Product of Vectors)

1.6.1 अदिश गुणन (Scalar Product): θ कोण पर झुके दो सदिशों **A** और **B** का अदिश गुणनफल **A .B** , वह अदिश राशि है जो दोनों अदिशों के परिमाणों और cosine θ के गुणन से प्राप्त होती है। अर्थात $\mathbf{A}.\mathbf{B} = AB\cos\theta$

$\mathbf{A}.\mathbf{B} = AB\cos\theta$

$= \mathbf{A}.$ (**A** पर **B** का प्रक्षेप)।

A और B के बीच एक बिन्दु-प्रतीक रखकर अदिश गुणनफल को व्यक्त करते हैं। इसी कारण अदिश गुणनफल को 'डाट-प्रोडक्ट' (dot product) भी कहते हैं। A और B द्वारा निरूपित राशियों के मात्रक समान होना आवश्यक नहीं है। गुणनफल $AB\cos\theta$ में सदिशों का केवल परिमाण ही होता है। अतः यह अदिश राशि है। इस कारण निम्नलिखित संबंधों को सरलता से समझा जा सकता है।



चित्र 1.7: दो सदिशों का अदिश गुणनफल

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{B}.\mathbf{A} = AB\cos\theta \qquad \text{......................(1.10)}$$

$$A.(B + C) = A.B + A.C \qquad \text{......................(1.11)}$$

यांत्रिकी के अन्य पाठों में इन सम्बंधों का ज्ञान बहुत उपयोगी होगा।

उदाहरण 1.6: *दो सदिशों के परिमाण* $|\mathbf{A}| = 30$ *और* $|\mathbf{B}| = 40$ *तथा उनके बीच का कोण* $\theta = 55^\circ$ *है। सदिश* $\mathbf{R} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$ *का परिमाण और दिशा ज्ञात करो।*

हल: समीकरण (1.5) के अनुसार $|\mathbf{R}| = \sqrt{A+B+2AB\cos\theta}$

सदिश **R** का परिमाण $= \sqrt{(30)^2+(40)^2+2\times30\times40\times\cos55}$

$|\mathbf{R}| = 62.2$ (लगभग)

$$\tan\alpha = \frac{\mathbf{B}\sin\theta}{\mathbf{A}+\mathbf{B}\cos\theta} = \frac{\mathbf{B}\sin55^\circ}{\mathbf{A}+\mathbf{B}\cos55^\circ} = \frac{40\times0.8192}{30+40\times0.5736} = \frac{32.768}{52.944}$$

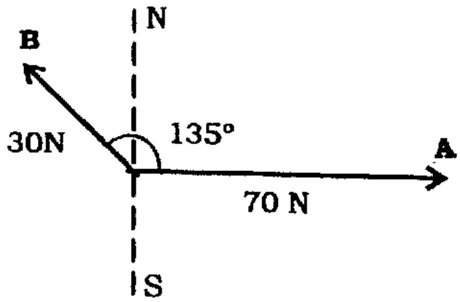
$= 0.6189,\ \alpha = 31.8^0$

अर्थात् सदिश **R**, सदिश **A** से 31.8° कोण बनाता है।

उदाहरण 1.7: एक आदमी A, एक गाड़ी को, 70N बल लगाकर पूर्व की ओर खींचता है। उसी गाड़ी को आदमी B, 30N बल लगाकर उत्तर-पश्चिम की ओर खींचता है।

(a) गाड़ी पर लगते हुए परिणामी बल को ज्ञात करो।

(b) परिणामी बल की दिशा ज्ञात करो।



हल: यहां $|\mathbf{A}| = 70$ N. $|\mathbf{B}| = 30$N, $\theta = 135^0$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(70)^2+(30)^2+2\times70\times30\times\cos135}$$

$$= \sqrt{4900+900+4200\times\cos(90+45)^\circ} = \sqrt{5800-4200\sin45^\circ}$$

$\therefore R = 53.1$ N.

एवं $$\tan\alpha = \frac{\mathrm{B}\sin\theta}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\cos\theta} = \frac{30\times\sin(90+45)^\circ}{70+30\cos(90+45)^\circ}$$

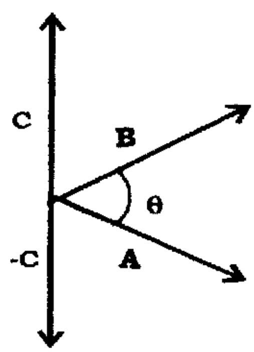
$$= \frac{30\cos45^\circ}{70+30\ (-\sin\ 45^\circ)}$$

$$= \frac{30\times0'7071}{70\ -\ 30\ \times\ 7071}$$

$$= \frac{21.213}{48.787}$$

$= 0.4348$

$\therefore \alpha = 23.5^\circ$



चित्र 1.8: दो सदिशों के सदिश गुणनफल का लेखाचित्र निरूपण

1.6.2 सदिश गुणन (Vector Product)

सदिश **A** और सदिश **B** सदिश गुणनफल एक सदिश **C** के रूप में इस प्रकार परिभाषित करते हैं कि इसका परिमाण $AB\sin\theta$ है जहां θ सदिशों **A** और **B** के बीच का कोण है। सदिश गुणनफल को इस प्रकार लिखते हैं:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \qquad \text{................(1.12)}$$

सदिश गुणनफल का परिमाण है

$$|\mathbf{C}| = AB \sin\theta \qquad \text{................(1.13)}$$

C की दिशा ज्ञात करने के लिए एक सरल नियम इस प्रकार है अपने दाहिने हाथ की उंगलियों को सदिश **A** के साथ-साथ फैलाओ **A** से **B** की ओर दोनों के बीच बने न्यूनत कोण θ को घेरते हुए मोड़िए। अंगूठा जो सीधा खड़ा है **C** की दिशा बताता है। यदि आप इस नियम का पालन करें तो यह आसानी से देख सकते हैं कि

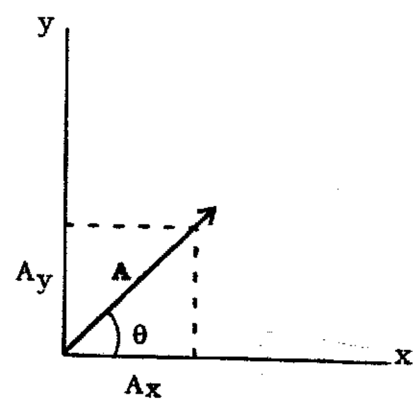
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \qquad \text{................(1.14)}$$

यदि **A** और **B** एक क्षैतिज तल में हैं तथा बीच θ न्यूनकोण है जैसा चित्र 1.8 में दिखाया गया है, तो $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$ की दिशा ऊर्ध्वतल में, ऊपर तथा $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{C}$ की दिशा नीचे की ओर होगी। **A** और **B** के बीच क्रास (×) का चिन्ह होने के कारण 'सदिश गुणनफल' को *क्रांस प्रोडक्ट'* (cross product) भी कहते हैं। हम इन संबंधों का उपयोग आगे चलकर करेंगे।

1.7 सदिशों का वियोजन (Resolution of Vectors)

एक सदिश को सदैव निर्धारित निर्देशांक तंत्र के सापेक्ष उसके घटकों में वियोजित किया जा सकता है।

चित्र 1.9 में सदिश **A** को समकोणिक निर्देशांक तंत्र में दिखाया गया है। सदिश का पुच्छ, निर्देशांक तंत्र के मूल बिन्दु O से संपाती है। सदिश के शीर्ष-बिन्दु से निर्देशाक्षों पर लम्ब खींचिए। हमें A_x और A_y राशियाँ मिलती हैं इन्हें सदिश **A** के घटक कहते हैं। इस प्रकम को सदिश का इसके घटकों में वियोजन कहते हैं। घटक A_x और A_y के **A** के साथ संबंध इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।



चित्र 1.9: *समकोणिक निर्देशाक्ष x और y की दिशा में सदिश A के घटक*

$$A_x = A \cos\theta \qquad \text{................(1.15) (a)}$$

$$A_y = A \sin\theta \qquad \text{................(1.15) (b)}$$

यहां पर θ सदिश **A** और X-अक्ष के बीच का कोण है। यदि सदिश **A** हमें ज्ञात हो अर्थात **A** का परिमाण और दिशा ज्ञात हो तो समीकरण 1.15 को प्रयोग करके घटकों A_x और A_y को प्राप्त किया जा सकता है। इसके विपरीत यदि हमें घटक ज्ञात हों तो सदिश का परिमाण और दिशा निकाली जा सकती है। इसके लिए समीकरण 1.15 (a) और 1.15 (b) का वर्ग करके जोड़ें तो-

$$A^2_x + A_y^2 = A^2 \cos^2\theta + A^2 \sin2\,\theta = A^2$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}} \text{ (परिमाण)}$$

और समीकरण 1.15b को 1.15 (a) से भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \text{ (दिशा)}$$

$\tan\theta$ के चिह्न से (धन या ऋण) निर्देशांक उस चतुर्थांश का पता लगता है। तीन विमीय आकाश में एक से अधिक सदिशों का वियोजन प्राप्त करने के लिए *मात्रक सदिश* (unit vector) की संकल्पना, अधिक सुविधाजनक होती है।

सदिश **A** को इकाई सदिश के माध्यम से इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$\mathbf{A} = \hat{U}_o\,|\mathbf{A}|$$

जहां पर $\hat{U}_o$ **A** की दिशा में इकाई-सदिश है। (अक्षर के ऊपर टोपी, इकाई सदिश का प्रतीक है) समकोणिक निर्देशांक पद्धति में $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ और $\hat{\mathbf{k}}$ को क्रमशः x, y और z की दिशा में मात्रक सदिश चुनते हैं। द्वि-विमीय पद्धति में, आइए कुछ सरल गणितीय अभ्यास करें। आवश्यकता पड़ने पर इसे तीन विमीय पद्धति में आसानी से परिवर्द्धित किया जा सकता है।

इकाई सदिश की परिभाषा के अनुसार

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{B}\,\hat{\mathbf{j}}$$

इसे चित्र 1.10 में दिखाया गया है

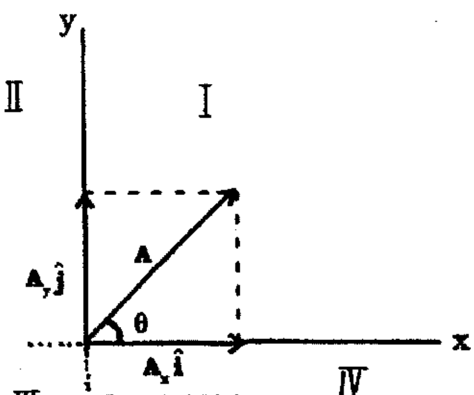


Fig. 1.10(a)

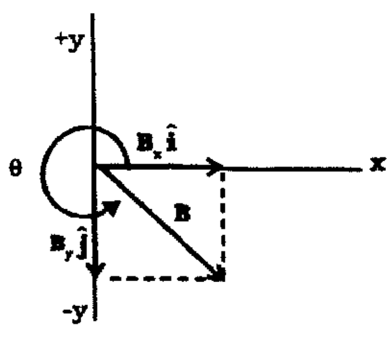


Fig. 1.10(b)

चित्र1.10: *निर्देशाक्षों की दिशा में सदिशों के घटक। सदिश A, चतुर्थांश I और सदिश B, चतुर्थांश IV में है।*

आइए दो सदिशों A और B के योग निकालने का प्रत्यन्त करें

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{A}_x + \mathbf{B}_x$$

$$R_y = A_y + B_y$$

यदि सदिश R, x अक्ष से θ कोण बनाता है तो-

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2}$$

एवं $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$

सदिशों के योग की इस विश्लेषणात्मक विधि की दक्षता प्रदर्शित करने के लिए निम्नलिखित प्रश्नों को हल करते हैं।

उदाहरण 1.8: *दो सदिश लिए गए हैं*

$\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ और $\mathbf{B} = 3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$

$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ *का मान ज्ञात कीजिए।*

उत्तर: हमारी पद्धति के अनुसार

$$A_x = 2,\ A_y = 3, B_x = 3, B_{\hat{\mathbf{y}}} = -4$$

$$R_x = 2 + 3 = 5, R_y = 3 - 4 = -1$$

$$R = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} = 5.1$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-1}{+5} = -0.2$$

θ का स्थान चतुर्थांश IV में होगा।

उदाहरण 1.9: *xy तल में दो बिन्दुओं A और B के निर्देशांक क्रमशः (-3, 2)m और (2, 4)m हैं। (a) A और B की स्थिति के सदिश लिखिए ($\mathbf{R}_A$ और $\mathbf{R}_B$) (b) $\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B$ तथा $\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B$ का मान निकालिए।*

हल:

(a) स्थिति सदिश $\mathbf{R}_A = \left(-3\hat{i} + 2\hat{j}\right)\text{m}$

$$\mathbf{R}_B = \left(2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}\right)\text{m}$$

(b) $\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B = \left(-3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}\right)$

$$= \left(-\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B = \left(-3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= -5\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$$

उदाहरण 1.10: यदि सदिश B में सदिश C जोड़ दिया जाय तो परिणाम $\left(-9\hat{i}-8\hat{j}\right)$ है। यदि C में से B घटा दिया जाय तो परिणाम $\left(-5\hat{i}-4\hat{j}\right)$ है। B की दिया क्या है ?

हल: $\mathbf{B} + \mathbf{C} = -9\hat{i}-8\hat{j}$....... (a)

$\mathbf{C} + \mathbf{B} = -5\hat{i} - 4\hat{j}$....... (b)

समीकरण (a) और (b) को जोड़ने पर

$2C = 4\hat{i} - 4\hat{j}, \therefore C = -2\hat{i} - 2\hat{j}$

समीकरण (a) में से $2\mathbf{B} = 14\hat{i} - 12\hat{j}$

$$\tan\theta = \frac{B_y}{B_x} = \frac{-7}{-6} = +1.167$$

समीकरण (b) को (a) में ये घटाने पर

$2B = 14\hat{i} - 12\hat{j}, \therefore B = -7\hat{i} - 6\hat{j}$

दी गई सारिणी के अनुसार θ निदेशाक्षों के III चतुर्थांश में है तथा **B** x- अक्ष से $\theta = 221^0$ का कोण बनाता है।

उदाहरण 1.11: *दिया गया है (i)* $\mathbf{A} + \mathbf{B} = -6\hat{i}+1\hat{j}$

(ii) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = -4\hat{i}+7\hat{j}$

(a) $\mathbf{A}$ *का परिमाण कितना है ?*

(b) $\mathbf{A}$ *की दिशा क्या है ?*

हल: (i) और (ii) जोड़ने पर $2\mathbf{A} = 2\hat{i}+8\hat{j}$

$$\mathbf{A} = \hat{i}+4\hat{j}$$

अर्थात $A_x =$ और $A_y = 4$

$$A = \sqrt{A^2{}_x + A^2{}_y} = \sqrt{17}$$

$$A = 4.1$$

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} = \frac{4}{1}$$

$$\theta = \tan^{-1}(4)$$

पाठगत प्रश्न 1.5

1. *फर्श पर लकड़ी का एक गुटका है।* **F** *बल लगाकर व्यक्ति* **A** *इसे खींच रहा है तथा F बल ही लगाकर व्यक्ति B इसे ढकेल रहा है। दोनों के बलों की दिशा फर्श से 30° कोण पर है। दोनों में से कौन गुटके*

को अधिक आसानी से गतिशील करेगा और क्यों?

....

2. *$50\ m$ परिमाण का एक सदिश $\mathbf{A}$, xy तल में है तथा x-अक्ष से 30^0 का कोण बनाता है। इस सदिश के x और y घटकों का मान बताओ ?*

....

3. *एक पिण्ड पर $200\ N$ का बल, धनात्मक x-अक्ष से 120^0 के कोण पर लग रहा है। समकोणिक निर्देशांक के अक्ष पर इस बल के परिमाण और दिशा ज्ञात करो।*

....

1.8 आपने क्या सीखा है

1 प्रत्येक भौतिक राशि की नाप तौल किसी मात्रक प्रणाली में होती है। भौतिकी में आजकल हम SI प्रणाली का उपयोग करते हैं।

2 यांत्रिकी में किलोग्राम, मीटर और सेकण्ड क्रमशः द्रव्यमान, लम्बाई और समय को नापने के SI प्रणाली में प्रयुक्त होने वाले मूल मात्रक हैं। इनके अतिरिक्त अन्य सभी मात्रकों को व्युत्पन्न-मात्रक कहते हैं।

3 (i) मिश्रधातु से बने एक मानक द्रव्यमान को मानक-किलोग्राम स्वीकृत किया गया है।

(ii) $\frac{1}{299792458}$ सेकण्ड में निर्वात में प्रकाश द्वारा चली गई दूरी को एक मीटर कहते हैं।

(iii) सीजियम-133 परमाणु द्वारा 9192631770 कम्पन करने के लिए आवश्यक समय को सेकण्ड कहते हैं।

4 प्रत्येक भौतिक राशि की विमाएं होती है। गणितीय व्यंजकों की यथार्थता की जांच करने के लिए, विमीय विश्लेषण एक सशक्त विधि है।

5 भौतिक राशियों में कुछ अदिश और कुछ सदिश होती हैं।

6 सदिशों का योग, घटाना सदिशों के समान्तर चतुर्भज नियम - से किया जाता है।

7 (i) अदिश गुणनफल $\mathbf{R} = \mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{AB}cos\theta$

(ii) सदिश गुणनफल $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{R}$

$|\mathbf{R}| = AB \sin\theta$ (परिमाण)

R की दिशा भी परिभाषित है।

8 सदिशों का घटकों में वियोजन किया जा सकता है।

1.9 पाठान्त प्रश्नावली

1. भारत में सबसे तेज़ चलने वाली रेलगाड़ी का औसत-वेग 120 किलोमीटर प्रतिघंटा है। मीटर प्रति सेकंड में उसका वेग क्या होगा?

2. समीकरण $s = ut + \frac{1}{2}\ at^2$ में s दूरी, u प्रारंभिक वेग, a त्वरण और t समय को व्यक्त करता है। प्रदर्शित कीजिए कि यह समीकरण विमीय दृष्टि से ठीक है।

3. यदि समीकरण $v = At + Bt^3$ (जहां x दूरी है और t समय) विमीय दृष्टि से ठीक हो तो सिद्ध कीजिए कि व्यंजक $A + 3B\ t^3$ की विमाएँ वेग की विमाओं के समान हैं।

4. एक परमाणु का व्यास 10^{-10} m है। इन परमाणुओं से बने 1 m^3 वाले ठोस में कुल अनुमानित परमाणुओं की संख्या बतलाइए।

5. शान्त जल में एक नाव स्थिर है।
नाव के एक ही बिन्दु पर दो रस्सियाँ बँधी हैं। एक रस्सी पर 12 N का बल लगाकर एक आदमी दक्षिण की ओर तथा दूसरी रस्सी पर 16 N का बल लगाकर दूसरा आदमी पूर्व की ओर खींच रहा है।
(a) वह परिणामी बल कितना है जिससे नाव खींची जा रही है ?
(b) नाव की गति की दिशा क्या है ?

6. नदी का बहाव 5-km/hr की दर से पूर्व की ओर है। इस नदी में एक तैराक 4 km/hr की चाल से दक्षिणी किनारे से सदैव उत्तरोन्मुक रहते हुए तैर रहा है।
(a) क्या वह उत्तरी किनारे के ठीक सामने वाले बिन्दु पर पहुंच सकता है ?
(b) पानी में उसकी प्रभावी गति की दिशा क्या है ?
(c) पानी में उसकी प्रभावी चाल क्या है ?

7. घर की क्षैतिज फर्श पर एक लड़का किसी मेज़ को 5N बल लगाकर दक्षिण की ओर खींच रहा है तथा उसकी बहन इसी मेज़ को 4N बल लगाकर पूर्व की ओर खींच रही है। मेज़ और फर्श के बीच 1N का घर्षण बल हर दिशा में है। वह परिणामी बल कितना है जो मेंज को गतिशील बनाता है ?

8. इस किसान रात को अपने खेतों में चलते समय रास्ता भूल जाता है। वह 100 कदम पश्चिम की ओर फिर 60 कदम उत्तर की ओर और फिर कुछ कदम किसी अन्य दिशा में चलता है तो अपने शुरुआती बिन्दु पर ही पहुंच जाता है। अपने अंतिम चरण में किसान, किस दिशा में कितने कदम चला ? लेखाचित्र बनाकर हल करो।

9. एक आदमी दिखाए गए मार्ग पर A बिन्दु से चलकर B पर पहुंचता है। उसके विस्थापन का परिणाम ज्ञात करो।

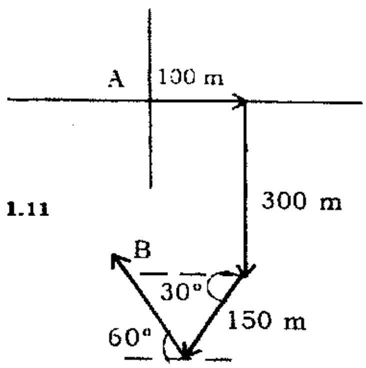


Fig 1.11

10. एक कण v वेग से पूर्व की ओर 5 सेकण्ड तक और फिर v वेग से ही 5 सेकण्ड तक उत्तर की ओर चलता है।
(a) वेग में प्रति सेकण्ड कितना परिवर्तन होता है ?
(b) वेग में प्रति सेकण्ड परिवर्तन को त्वरण कहते हैं। त्वरण की दिशा क्या है ?

11. क्षितिज से 30° पर झुके तल पर 5kg का एक गुटका सरक रहा है। तल पर गतिशील बनाने वाले बल का परिणाम ज्ञात करो।

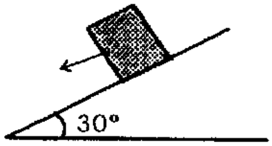


Fig 1.12

12. दो सदिश $\mathbf{A} = 8$ यूनिट और $\mathbf{B} = 5$ यूनिट हैं। इनके बीच का कोण 60° है। ज्ञात करो।
(a) $\mathbf{A}.\mathbf{B} = ?$
(b) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = ?$ तथा इसकी दिशा ज्ञात कीजिए।
($\mathbf{A}$ और $\mathbf{B}$ क्षैतिज तल में हैं)

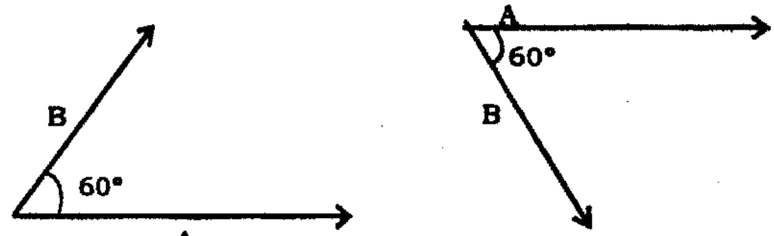


Fig 1.13

13. दो सदिश दिये गए हैं $A = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ एवं $B = 2\hat{i} - 5\hat{j}$ $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ एवं $(\mathbf{A}-\mathbf{B})$ की गणना कीजिए।

प्रश्नों के उत्तर मिलाइए

पाठगत प्रश्न 1.1

1. कार की चाल $= \frac{80\,km}{hr} = \frac{80 \times 1000}{60 \times 60}\frac{m}{s} = \frac{200}{9} m/s$ = 22.2 m/s

2. मूल मात्रकों में परस्पर कोई अन्तर्सम्बन्ध नहीं होता और वे संख्या में मात्र सात हैं। जबकि न्युत्पन्न मात्रक, मूल मात्रकों के संयोजन से प्राप्त होते हैं और इनकी संख्या कितनी भी हो सकती है।

3. परमाणु त्रिज्या 10^{-10} m = 1 माइक्रो मीटर

4. 1 वर्ग फीट = 1 फीट × 1फीट $= \frac{12 \times 12 \times 2.54 \times 2.54}{10^4} = 0.0929 m^2$

4500 वर्ग फीट = 45 × 0.0929 m² = 418 m²

पाठगत प्रश्न 1.2

1. $v \alpha g^m h^n$

वामपक्ष का विमीय सूत्र = $M^0 LT^{-1}$

दाहिने पक्ष का विमीय सूत्र $= g^m h^m$

$= (LT^{-2})^m (L)^n = M^0 L^{m+n} T^{-2m}$

दोनों पक्षों की विमाओं की तुलना करने पर

-2m = -1

एवं m + n = 1

$m = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow n = 1 - m = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

परिणामतः $v \alpha g^{\frac{1}{2}} h^{+\frac{1}{2}}$

अर्थात् $v^2 \alpha gh$

2. $y = A \sin (k_1 t + k_2 x)$

y और A दोनों की विमा L^1 होने के कारण $(k_1 t + k_2 x)$ एक विमाहीन राशि है।

$k_1 t = M^0 L T^0$ अर्थात $k_1 = T^{-1}$

$\Rightarrow k_{2x} = M^0 L^0 T^0$ अर्थात $k_2 = L^{-1}$

3. $a \alpha \frac{F}{m} \Rightarrow F \alpha m a.$

$R = MLT^{-2}$

पाठगत प्रश्न 1.3

1. एक घंटे में बिजली का खर्च = 0.4 मात्रक

एक वर्ष में खर्च हुई बिजली = 0.4 × 24 × 365 $\simeq$ 3650 मात्रक

बिजली के एक मात्रक का मूल्य = 3 रु.

अध्यापक के घर पर बिजली वार्षिक खर्च = 3650 × 3 = 10^4 रु.

2. नमक पर प्रति व्यक्ति खर्च = 1 कि.ग्रा. प्रतिमास

= 12 कि.ग्रा. प्रतिवर्ष

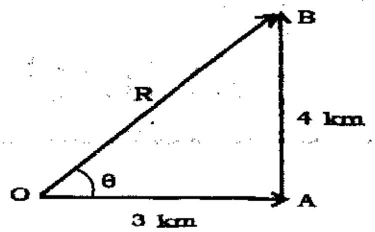
= 10 कि.ग्राम प्रतिवर्ष

कुल जनसंख्या $9 \times 10^8 \simeq 10^9$

नमक का कुल खर्च प्रतिवर्ष $= 10 \times 10^9 = 10^{10}$ किलोग्राम

पाठगत प्रश्न 1.4

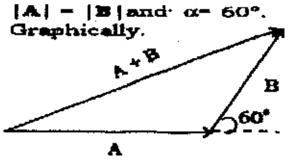
1. परिणामी सदिश का अधिकतम परिणाम तब होगा जब तीनों सदिश एक ही दिशा में प्रभावी हों। और उस स्थिति में परिणामी सदिश का मान $= 8 + 16 + 20 = 44$ मात्रक परिणामी सदिश का न्यूनतम परिणाम $= 4$ मात्रक होगा जबकि 8 और 16 यूनिट वाले सदिश 20 यूनिट वाले सदिश की विपरीत दिशा में प्रभावी हों।



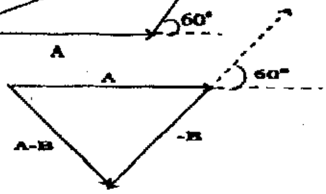
2. (a) R = 5 km.
   (b) $\tan\theta = 4/3 = 1.33$
   θ = about 53°

3. |A| = |B| and α = 60°.
   Graphically.

(a)



(b)



पाठगत प्रश्न 1.5

(1) चित्र से स्पष्ट है कि व्यक्ति A गुटके को अधिक आसानी से गतिशील कर सकेगा क्योंकि उसके द्वारा लगाये गये बल का ऊर्ध्वाधर घटक गुटके के भार को विपरीत दिशा में क्रियाशील होने के कारण गुटके और फर्श के बीच के घर्षण बल को कम करेगा।

$$Ax = |A|\cos\theta$$

$$= 50\cos 30 = 25.3\text{m}$$

$$A_y = |A|\sin 30 = 25\text{m}$$

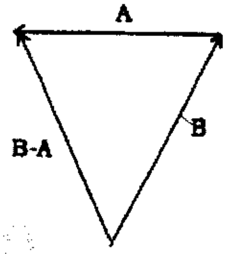
$$F_y = 200\cos 30^0 = 100\sqrt{3}\text{N}$$

$$F_x = -200\sin 30 = -100\text{N}$$

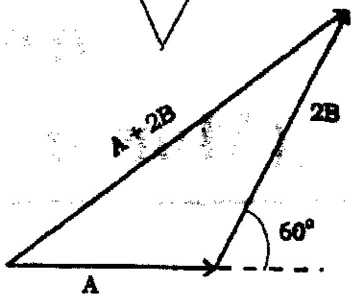
पाठगत प्रश्न 1.4

3.

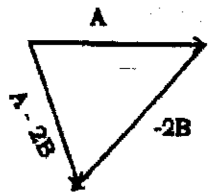
(c)



(d)



(e)



Intext Questions 1.5

1.

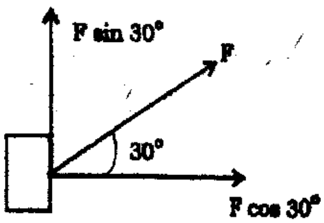


Fig a : Pulling the block